数理解析研究所講究録
517巻 1984年 12-23

Diophantus不等式 $|\lambda_1 x_1^2+\cdots+\lambda_4 x_4^2|<\varepsilon$ の可解性について

山梨大学　中井喜信 (Yoshinobu Nakai)

実数係数不定値の2次形式 $Q(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)$) について

「[?] $\forall\varepsilon$ 実数 >0, $\exists ?\ \mathbf{x}\in\mathbb{Z}^n(\neq 0)$ s.t. $|Q(\mathbf{x})|<\varepsilon$」

のようなDiophantus不等式を扱いたい。もし $Q(\mathbf{x})$ が、有理数係数ならば、ε がある程度小さくなると、不等式を解く事は、Diophantus方程式 $Q(\mathbf{x})=0$ を解く事と同じになり、これは $Q(\mathbf{x})$ の「対角化」を行う事により、十分にくわしく調べられて来ている。一方 $Q(\mathbf{x})$ が真に実数係数のままのとき，つまり，$\forall\alpha$ 実数 $(\neq 0)$ について $\alpha Q(\mathbf{x})$ は整数係数にならない (Oppenheim (1931) の "incommensurable") とき、有理数係数の場合の手法はそのままでは使えなくなる。そこで問題は二つに分れて、

「[?(*)] $\exists ?\ n_0$ s.t. $\forall n\geq n_0$, $\forall Q(\mathbf{x})$ (incommensurable な) 不定値実数係数2次形式, $\forall\varepsilon$ 実数 >0, $\exists\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^n(\neq 0)$ s.t. $|Q(\mathbf{x})|<\varepsilon$」

というタイプの問題と，$Q(\mathbf{x})$ に一定の制限をつけて，例えば

「[?(**)]　(?(*)) について，$Q(\mathbf{x})$ は「additive type (x_i, x_j 達に cross-terms が出て来ないもの)」に制限した場合」というタイプの問題に分れる。更には，解の分布，性質などに問題は発展してゆくが，まず上記のように考えてみる。

一般には [?(*)] の n_0 は5で良かろうというのが「Oppenheim の予想 (1931) であるが今の所 Birch-Davenport-Ridout の $n_0 = 21$ が記録のようである。整数係数の方は古典的な Meyer の $n_0 = 5$ の結果がある。[?(**)] の方は，Davenport-Heilbronn (1946) で $n_0 = 5$ は十分というのが，Hardy-Littlewood が，Diophantus 方程式を扱うために開発した「circle method」を発展させた方法と，Diophantus 同時近似についての簡単なしかし決定的な lemma とを使い，示された。一方 $a_1x_1^2+\cdots+a_4x_4^2=N$ の形の Diophantus 方程式を扱うのに，Kloosterman (1926) は，いわゆる「Kloosterman 和」を non-trivial に評価する事により，解の個数に関する漸近公式の期待される主要項に比して，もし trivial に Kloosterman 和を評価すると誤差項になるべき分が同程度の order を有してしまうという困難を切り抜けた。その後，4変数の additive 型の不等式について，Watson (1953) は Pell 方程式の解を上手に利用して，特定の形の係数を有する $Q(\mathbf{x})$ について，Diophantus 不等式の可解性を示した。(Watson は，同時に3変数の例も示している。) 次に，Iwaniec (1977)

は．彼の篩を用い $Q(x) = (x_1^2 + x_2^2) - \theta\cdot(x_3^2 + x_4^2)$ （θ:実数の無理数 >0）について Diophantus 不等式の可解性を示した。そこでは $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ のノルムの性質が利用されている。そこで Davenport - Heilbronn の手法で Kloosterman 和の事をからめて $Q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_4 x_4^2$ （不定値, incommensurable）が扱えないであろうかと考えられるが、$\lambda_1, \cdots, \lambda_4$ に連分数の言葉で述べられる制限をかなり厳しくつければ「yes」であるという事を説明するのがこの稿の目的である。結局最大の neck は『積分用の変数 α および λ_i 達の「近似分数」（連分数の用語）がわかれば $\lambda_i\alpha$ の近似分数がわかるか』という事になるが、それがある意味で「わかる」という事（後記(ハ), (ハ)′ 参照）である。期待としては、$n_0 = 4$ で [?(**)] は肯定的であり、$n = 3$ では [?(**)] は $Q(x)$ の分類（肯定的に解けるような $Q(x)$ の特徴づけ）如何という事になるであろう。3変数については、Watson の例以外にはないようである。4変数については、後記(ハ) を (ト) で使用するとき、何か"実数係数の場合に Singular Series の役をする項"をとり出すべき事になるであろうと期待している。従ってその"項"の性質によっては、7行上に記した $n_0 = 4$ の場合の期待も $Q(x)$ の分類問題に帰するかもしれない。多分、Kloosterman 和に関する Linnik 予想（Kuznecov 参(1981)）が解決される

程度に応じて 後記 Corollary の $\Lambda(\eta_1,\cdots,\eta_4)$ 中の ⊗ の $\overline{U}_1 < Q^{0.03}$ や $\overline{U}_3, \overline{U}_4 < P^{0.03}$ などは 改良されるはずで（ここでは、Weil の 合同ゼータ関数の リーマン予想の解決を利用した $\left|\sum_x \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\,\frac{ax+b\bar{x}}{p}\right)\right| < 2p^{\frac{1}{2}}$
（p 素数, $x=1,2,\cdots,p-1$, $x\bar{x}\equiv 1 \bmod p$, $p\nmid(a,b)$）ではなく、旧い Kloosterman の $\ll p^{\frac{3}{4}}$ を利用した評価）、少くも

$$|\lambda_1\lambda_2^{-1}| = a_0 + \frac{1}{|a_1} + \frac{1}{|a_2} + \frac{1}{|a_3} + \cdots \qquad \left(\begin{array}{l} a_0 \in \mathbb{Z}, \\ a_1, a_2, a_3, \cdots \in \mathbb{N} \end{array}\right)$$

が、$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$, $q_0 = 1$, $q_{-1} = 0$ とおいて、

$$\limsup_{k\to\infty} a_k (\log q_k)^{-c_0} = +\infty \qquad (c_0 \text{は適当な正定数})$$

ならば、本質的に、ここに述べると同じ原理で扱えると思われる。しかし（Linnik 予想が最良の意味で解決されたとき）

$$\limsup_{k\to\infty} a_k < +\infty \qquad (\text{例えば})$$

のときに、上記の「Singular Series のような項」が期待するような形に現れるかを見たいのである。3変数については circle method は無力のように見える。Goldbach（2個の）の場合によく扱われる「almost all 流」の手法もないのであろうか。

§8.「系」　（((0.2.1)) 等はタイプ原稿の節番号。）

最初から系では妙だが、タイプ原稿 [N] で、複雑な条件を有する $\lambda_1,\cdots,\lambda_4$ についての定理の系として下記の系を得たので。まず $\nu(*)$ は 整数の相異素因子数とし、いま $\eta_1,\cdots,\eta_4$ を $=\pm 1$ で $\eta_1,\cdots,\eta_4$ は同符号でないものの組とし

て、

$$\Lambda(\eta_1,\cdots,\eta_4) \underset{\mathrm{def}}{=} \left\{ (\lambda_1,\cdots,\lambda_4)\in\mathbb{R}^4 \text{ s.t. } \lambda_i \neq 0,\ \operatorname{sgn}\lambda_i = \eta_i, \right.$$

λ_1 無理数, (これは statement を簡単にするため)

$\lambda_2 = \eta_2\ (=\pm 1)$,

$|\lambda_1|$ の相続く近似分数 V_1/U_1, R/Q, $(1\le U_1 < Q)$

$|\lambda_3|$ の近似分数 V_3/U_3,

$|\lambda_4|$ の近似分数 V_4/U_4

による組 $(R/Q,\ V_1/U_1,\ V_3/U_3,\ V_4/U_4)$ で下記の条件 ⊛ を満すものが無限に存在すること $\}$

とおく。ただし条件 ⊛ は(便宜上 $U_2 = V_2 = 1$ とおいて)

⊛

U_1, V_1 は

$$e^{(\log Q)^{\frac{1}{3}}} < U_1 < Q^{0.03},$$

$$\nu(U_1V_1) < (\log Q)^{\frac{1}{4}},$$

$\exists p$ 素数 s.t. $p_1^{(\text{奇数巾})} \| U_1$ & $p_1 > (\log Q)^{0.26}$

V_3/U_3, V_4/U_4 は $P = (QU_1(\log Q)^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$ とおいて

$$\left| |\lambda_i| - V_i/U_i \right| < \frac{1}{P^2(\log P)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\nu(V_iU_i) < (\log Q)^{\frac{1}{4}}, \qquad (i=3,4)$$

λ_i が無理数なら $(\log Q)^{\frac{1}{2}} < U_i < P^{0.03}$,

λ_i が有理数なら $|\lambda_i| = V_i/U_i$

かつ

$$(U_{i_1}, V_{i_2}) = 1 \qquad i_1, i_2 = 1,\cdots,4$$

$$(U_{i_1}, U_{i_2}) = 1 \qquad i_1, i_2 = 1,\cdots,4,\ i_1\neq i_2$$

である。$\Lambda(\eta_1,\cdots,\eta_4)\neq\phi$ については後述する。このとき

[系] $\eta_1, \cdots, \eta_4 = \pm 1$ (同符号ではない) に対し $\exists C, C_i'', C_i'$ (正の絶対定数),

s.t.「$\forall \varepsilon > 0$, $\forall (\lambda_1, \cdots, \lambda_4) \in \Lambda(\eta_1, \cdots, \eta_4)$, $\exists P_0$

s.t.『 $P > P_0$ (P は ⊛ にあるもの)

ならば

$$\#\left\{ (x_1, \cdots, x_4) \in \mathbb{N}^4 \; ; \; \begin{array}{l} C_i' |\lambda_i|^{-\frac{1}{2}} P < x_i < C_i'' \cdot |\lambda_i|^{-\frac{1}{2}} P, \\ |\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_4 x_4^2| < \varepsilon \end{array} \right\}$$

$$\geqq C \cdot \varepsilon \cdot (\max_i |\lambda_i|)^{-2} P^2$$

』」

が成立する。 ((C.2.1))

最後の所は $\geqq C \cdot \varepsilon |\lambda_1 \cdots \lambda_4|^{-\frac{1}{2}} P^2$ と書きたい所だが証明の都合でそうならなかった。(今春の広島大学での数学会の代数学分科会アブストラクト、筆者の P_0 は位置が書き間違い。)

上記 $\Lambda(\eta_1, \cdots, \eta_4)$ が、十分沢山に $(\lambda_1, \cdots, \lambda_4)$ を含む事は次のように構成できる。連分数論においてよく知られた

「[Lemma] 実数 $\beta\ (>0)$ と既約分数 P/Q について $|\beta - P/Q| < (2Q^2)^{-1}$ ならば、P/Q は β の正則連分数展開による近似分数の一つである。」

を利用する。今条件(i)の V_1/U_1, R/Q があるとして U_1°, V_1° を相異る素数で $U_1^\circ > \exp(Q^{700})$, $V_1/U_1 \leqq V_1^\circ/U_1^\circ \leqq R/Q$, $|R/Q - V_1^\circ/U_1^\circ| < (2Q^2)^{-1}$ととれば、$V_1^\circ/U_1^\circ$ は R/Q を近似分

数の一つとしている。次に V_{1*}^0/U_{1*}^0 を $U_1^0V_{1*}^0 - V_1^0U_{1*}^0 = \pm 1$, $U_1^0 > U_{1*}^0 \geqq Q$, $V_1^0/U_1^0 \gtrless V_{1*}^0/U_{1*}^0 \gtrless R/Q$ととり（$V_{1*}^0/U_{1*}^0 = R/Q$ かもしれない）、$a_1^0 \in \mathbb{N}$ を $R^0 = a_1^0V_1^0 + V_{1*}^0$, $Q^0 = a_1^0U_1^0 + U_{1*}^0$ が $\exp((\log Q^0)^{\frac{1}{3}}) < U_1^0 < Q^{0\,0.03}$ となるようにとると、R^0/Q^0, V_1^0/U_1^0, R/Q, V_1/U_1 が得られる。再び V_1^0/U_1^0, R/Q から上の事をくり返す。このようにして一つの Cauchy 列 V_1/U_1, R/Q, V_1^0/U_1^0, R^0/Q^0, ... を得て、これの定める実数が $|\lambda_1|$ の役を果せる。$|\lambda_3|$, $|\lambda_4|$ についても同じように構成してゆける。((0.2.1.2))

§8 証明に必要な主な事を述べる。各々正確に書くと長すぎるので、くわしくはタイプ原稿[N]を参照されたい。

A) 2頁目に Davenport-Heilbronn の説明の所で述べた Diophantus 同時近似の Lemma とは別のものであるが、その発展形として、

[Prop.] $\forall c_1\,(>1)$, $\forall e_1\,(>0)$, $\exists h_1\,(\gg 1)$, $\exists h_1'\,(\gg 1)$, $\forall E_{100}\,(\gg 1)$, $\exists P_1$ st.「λ_1, λ_2 実数 >0, $\lambda_1\lambda_2^{-1}$ 無理数, $|\lambda_2| \asymp E_{100}$,

$\lambda_1\lambda_2^{-1}$ の近似分数 R/Q ($R, Q \in \mathbb{N}$, $(R,Q)=1$)

について、

P は $Q^{\frac{1}{2}}(\log Q)^{h_1'} \leq P \leq Q^{c_1}$, $P > P_1$,

H は $P \gg H \gg (\log P)^{h_1}$

とするとき、

$$\text{measure of}\left\{\begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R} \text{ s.t. } (\log H)^{-c_1} \leq \alpha \leq (\log H)^{c_1}, \\ \quad i=1,2 \text{ について } \lambda_i\alpha \text{ は既約分数 } B_i/A_i \text{ で} \\ \qquad \left|\lambda_i\alpha - \dfrac{B_i}{A_i}\right| < \dfrac{(\log H)^{c_1}}{p^2}, \\ \quad pH^{-1} \leq A_i \leq pH^{-1}(\log H)^{c_1} \\ \quad \text{となるものを有する} \end{array}\right\} \leq$$

$$\llcorner \leq \frac{1}{H^2\cdot(\log H)^{c_1}}$$

となる。((1.1.1)).

及び $(\log p)^{h_1} \gg H \gg 1$ に応ずる少し形のちがうProp達.

((1.1.2)) 及び ((1.1.3)). 定性的には；「$\lambda_1\lambda_2^{-1} \notin \mathbb{Q}$ なら、$\lambda_1\alpha$, $\lambda_2\alpha$ が同時に、同程度の既約分母をもつ分数で同程度に良く近似される事はない」。

(ロ) $\beta \in \mathbb{R}$ $(\notin \mathbb{Q})$, ξ' & $\xi'' \in \mathbb{N}$ (s.t. ξ', $\xi''-\xi' \asymp \xi''$),

β の相続く近似分数 B^*/A^*, B_*/A_* $(A_* \ll \xi'' \ll A^*)$

をとって $e(\xi) = \exp(2\pi\sqrt{-1}\,\xi)$ とおいて

$$\left|\sum_{x;\ \xi'<x\leq\xi''} e\left(\tfrac{1}{2}\beta x^2\right)\right| = \begin{cases} \asymp \min\left(\dfrac{\sqrt{A^*}}{\left(\xi''/\sqrt{A_*A^*}\right)},\ \sqrt{A^*}\times\left(\xi''/\sqrt{A_*A^*}\right)\right) \\ \text{または} \\ \ll \sqrt{A_*} \end{cases}$$

を得る. ((2.2.14)). ただし $\xi''/\xi' = 1+\theta$ とおくとき $\theta \asymp 1$ はある absolute constant より小さくとる要がある。

(ロ') 同じく $\displaystyle\sum_{x;\ \xi'<x\leq\xi''} e\left(\tfrac{1}{2}\beta x^2\right)$ のもっとくわしい表示. ((4.5.1)).

ここには Gauss 和 及び Kloosterman 和 に対応する項が現れ

る。((4.5.2)).

(ロ). $\left(\frac{Y}{p}\right)$ を素数 p について $X^2 \equiv Y \bmod p$ に関する Legendre 記号とし、一般に $X, Y \in \mathbb{N}$ のとき、$X=(X,Y)\cdot X_1$, $Y=(X,Y)\cdot Y_1$, $X_1 = 2^{\gamma}\hat{X}_1$, $(2\nmid \hat{X}_1$, $(X_1,Y_1)=1)$ とおいて

$$J\left(\frac{Y}{X}\right) = \left(\frac{Y_1}{\hat{X}_1}\right) \quad \text{Jacobi の記号}$$

とおく。このとき ((2.3.9))

$$\left|\sum_{\ddot{A}^\Delta}\prod_{i=1,\dots,4} J\left(\frac{(p_i+q_i)\ddot{A}-q_i\ddot{A}^\Delta}{(\hat{t}_i^{-1}D_i a)}\right)\right| \ll \left(\begin{array}{c}\text{non-trivial な}\\ \text{評価}\end{array}\right)$$

を得る。ただし、$a, b, \ddot{A}, p_i, q_i$ は止めてあり V_i/D_i は $1/\alpha_i$ の近似分数で、$\ddot{A}^\Delta$ は

$$(*)\quad \begin{cases} \ddot{A}^\Delta \equiv \ddot{A}^\Delta_0 \mod W'[V_1,\dots,V_4] \ (\text{最小公倍数}), \\ (\ddot{A}^\Delta, \ddot{A}) = 1, \\ \ddot{A}^\Delta \text{ はいろいろの整数との公約数が「大きくない」} \end{cases}$$

を動き、W' はいろいろの条件を満す数だが特に

$\hat{t}_i$ を $(\ddot{A}^\Delta, D_iV_iab)$ の因子で $D_i a$ の約数部分

とおくとき

$$\hat{t}_i \mid W' \quad \text{for } \forall \ddot{A}^\Delta \ ((*) \text{ のもの})$$

となっている。この証明の際に5頁の㊉における素数 p の存在を仮定した。

(ハ)' 及び上記 $\ddot{A}^\Delta$ の存在を保証する Proposition ((2.3.11.5)).

(ニ) Kloosterman 和を含む重み附の指数和についての

van der Corput 的な表示. ((3.1.4)), ((3.2.4)).

(ホ) さて. Birch - Davenport (1958) のように $|\lambda_1 x_1^2+\cdots+\lambda_4 x_4^2|<\varepsilon$ のかわりに $\left|\sum_{i=1}^{4} (\varepsilon^{-1} 2^{2t_i+1}\lambda_i)(2^{t_i} y_i)^2\right| < 2$ を用う事を考えて. λ_i 達は少しかわるが $|\lambda_1 x_1^2+\cdots+\lambda_4 x_4^2| < 2$ ($|\lambda_i| \asymp E_{100}$) の形で用う. ($E_{100}$ がほぼ ε^{-1} の役をする).

$$\#\left\{(x_1,\dots,x_4)\in\mathbb{N}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} c_i'|\lambda_i|^{-\frac12}P < x_i \le c_i''|\lambda_i|^{-\frac12}P, \\ |\lambda_1x_1^2+\cdots+\lambda_4x_4^2|<2 \end{array}\right\}$$

$$\ge \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}\right)^2 \prod_{i=1}^{4}\Bigg(\sum_{\substack{x_i:\\ \text{s.t. } c_i'|\lambda_i|^{-\frac12}P<x_i\le c_i''|\lambda_i|^{-\frac12}P}} e\left(\tfrac12\alpha\lambda_i x_i^2\right)\Bigg)\cdot d\alpha$$

であり. 積分変数 α について $|\alpha|\ll P^{-1}$ の部分は. 右辺について contribution $\gg |\lambda_1\cdots\lambda_4|^{-\frac12}P^2$ なので. 他の α についてはすべて contribution $= o(|\lambda_1\cdots\lambda_4|^{-\frac12}P^2)$ を示したい.

まず (イ)(ロ) を利用して L^1-ノルム的に処理してしまうと ((§§4.1〜4.3)), 残る α は

$$\alpha \text{ s.t. } \left\{\begin{array}{l} |\alpha| \asymp 1, \\ |\lambda_i\alpha| \text{ の } \xi'' \text{ の近くの近似分数達はすべて} \\ \text{分母は} \asymp \xi'' \ (= E_{100}^{-\frac12}P) \end{array}\right.$$

となる. この α も結局は contribution $= o(\cdots)$ を示したいのだが, 次のようになる.

(ヘ) 上記残る α について. α の相続く近似分数 B/A, B'/A'

($A > A'$, いずれも $\asymp C^g$ まで) および $|\lambda_i\alpha|^{-1}$ の相続く近似分数 A_i^{**}/B_i^{**}, A_i^{*}/B_i^{*}, A_{i*}/B_{i*} ($A_i^{**} > A_i^{*} > A_{i*}$, いずれも大きい $\asymp C^g$ まで), (g は適当に調整する E_{100} 等に depend する定数)
について

$$\varepsilon = AB' - BA' \quad (= \pm 1)$$

を見て、各 i について

$$\left(A_i^{**}/B_i^{**},\ A_i^{*}/B_i^{*}\right) \quad \text{または} \quad \left(A_i^{*}/B_i^{*},\ A_{i*}/B_{i*}\right)$$

のうち $\quad A_i^{**}B_i^{*} - B_i^{**}A_i^{*} = \varepsilon \quad$ または $\quad A_i^{*}B_{i*} - B_i^{*}A_{i*} = \varepsilon$

を満す方を採用して改めて (A_i/B_i, A_i'/B_i') と表せば、

「B/A, B'/A', V_i/U_i から A_i/B_i が表せる」

ことがわかる.((4.4.12)),((4.4.14)). 正確には B/A, B'/A' そのものではなく、少し因子をとり除いた $\ddot{B}/\ddot{A}$ 等 ((ハ)参) を使う。

(ハ)′ 及び逆に相等する,((4.4.19)); (ハ)の表しかたで機械的に作った A_i/B_i 等をもつ α は

① A_i/B_i, A_i'/B_i' は $|\lambda_i\alpha|^{-1}$ の相続く近似分数

かまたは

② (ホ)で (((§§4.1−4.7))) 既に処理できるもの

となる。

(ト) 従って残るαについて, (ニ),(ハ),(ハ)′ を使い、このα達の結局は contribution $= o(\cdots)$ が示せる。この最後の段階で [系]の $Q^{0.03}$, $P^{0.03}$, (☆) の「互に素」, 素数 p の存在

など強い仮定が要る事になる。(ヘ)の所までは、(イ)にあるような Prop. が使える程度の仮定があれば扱える。

A. Oppenheim : Ann. of Math., (2) 32 (1931), 271–298.

B. J. Birch – H. Davenport : Mathematika, 5 (1958), 8–12.

H. Davenport – D. Ridout : Proc. London Math. Soc., (3) 9 (1959), 544–555.

H. Davenport – H. Heilbronn : J. London Math. Soc., 21 (1946), 185–193.

以上三著は H. Davenport 全集(Ⅲ巻目)に入っている。

H. D. Kloosterman : Acta Math., 49 (1926), 407–464.

G. L. Watson : J. London Math. Soc., 28 (1953), 293 – 242.

H. Iwaniec : Acta Arith., 33 (1977), 209 – 229.

N. V. Kuznecov : Math. of USSR-Sbornik, 39 (1981), 299–342.

Y.-N. Nakai : "On Diophantine inequalities of real indefinite quadratic forms of additive type in four variables", タイプ原稿[N]。

(5-6頁目の[要]は今春の広島大学での学会の分科会でのアブストラクトと同内容 (P_0 の位置書きまちがい))

(補) 2頁目の Davenport-Heilbronn の Diophantus 同時近似の考え方、(ト)の((4.3.9))で使う。

以上。